Departamento Inteligencia Artificial

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Lógica Proposicional: Semántica

Andrei Paun

apaun@fi.upm.es

http://web3.fi.upm.es/AulaVirtual/

Despacho 2201

Interpretación de FBFs proposicionales

$FBF(L_0) \Rightarrow \{ V, F \}$

- Interpretación: i(FBF proposicional) = V / F
  - Una función de interpretación asigna un significado a las FBFs
  - El valor de verdad de una fórmula depende de:
    1. El valor de verdad de sus variables (p, q, r,…)
    2. Interpretación de sus conectivas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)

- Por tanto, una interpretación debe definir 1 y 2 para cada variable y conectiva posible:
  - Para cada variable p: i(p) = V / F
  - Cada conectiva viene definida por interpretación.

Departamento Inteligencia Artificial

Interpretación de conectivas

- Define interpretación de fórmulas moleculares (donde A,B son FBFs cualquieras):

  - $i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$
  - $i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = V$
  - $i(A \vee B) = V$ sii $i(A) = V$ o $i(B) = V$
  - $i(A \rightarrow B) = V$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = V$
  - $i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$ sii

  $i(A)=V$ y $i(B)=V$ o bien $i(A)=F$ y $i(B)=F$

  $i(\neg A) = F$ sii $i(A) = V$

  $i(A \wedge B) = F$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = F$

  $i(A \vee B) = F$ sii $i(A) = F$ y $i(B) = F$

  $i(A \rightarrow B) = F$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = F$

  $i(A \leftrightarrow B) = F$ sii $i(A) \neq i(B)$ sii

  $i(A)=V$ y $i(B)=F$ o bien $i(A)=F$ y $i(B)=V$

Departamento Inteligencia Artificial

Tablas de verdad

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V			
V	F	F	V			
F	V	V	V			
F	F	V	F			

p	q	$\neg p \vee q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Tablas de verdad en la web

- Tablas de verdad:
  - http://en.wikibooks.org/wiki/Formal_Logic/Sentential_Logic/Truth_Tables

- Generador de tablas de verdad:
  - http://www-cs-students.stanford.edu/~silver/truth/

- Para una fórmula de n variables proposicionales existen 2^n interpretaciones distintas. Para 3 variables:

  $i_1(p) = i_1(q) = i_1(r) = T$

  $i_2(p) = i_2(q) = V$; $i_2(r) = F$

  …

  $i_8(p) = i_8(q) = i_8(r) = F$

Departamento Inteligencia Artificial

Fórmulas equivalentes

Para dos fórmulas A y B del lenguaje L_0: A es **equivalente** a B (**$A \Leftrightarrow B$**, **$A \equiv B$**) sii para toda interpretación i se cumple i(A) = i(B)

Ejemplos:

- $(A \vee B) \equiv (\neg A \to B) \equiv (\neg B \to A)$
- $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B) \equiv (\neg B \to \neg A)$
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \to B) \wedge (B \to A))$
- $(A \leftrightarrow \neg B) \equiv ((A \vee B) \wedge \neg(B \wedge A))$ XOR

Departamento Inteligencia Artificial

Validez – definiciones

- Una fórmula A se llama:
  - FBF **contradicción** sii no existe una interpretación i(A) = V
  - FBF **válida** o tautología sii no existe una interpretación i(A) = F
  - FBF **contingente** sii pueden ser verdaderas o falsas

Ejercicios de semántica proposicional

- Determine de cada una de las siguientes fórmulas si es tautológica, contradictoria o contingente. Indicando la(s) interpretación(es) que lo demuestran:
  1. $p \wedge q \rightarrow p$
  2. $p \vee q \rightarrow p$
  3. $p \rightarrow \neg p$
  4. $p \vee q \rightarrow (r \vee s \rightarrow p)$
  5. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
  6. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
  7. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  8. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  9. $(p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
  10. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
  11. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
  12. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
  13. $p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
  14. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  15. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Satisfacibilidad de fórmulas

- Una interpretación i **satisface** una fórmula A (o es un **modelo** de A) sii i(A) = V
- Una interpretación i es un **contramodelo** de A sii i(A) = F
- Una fórmula $A \in L_0$ es **satisfacible** sii *existe una* interpretación i tal que i(A) = V
- Una fórmula $A \in L_0$ es **insatisfacible** sii *no existe una* interpretación i tal que i(A) = V
- Conjuntos de fórmulas $\{A_1,\ldots,A_n\}$: Una interpretación i **satisface** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para *todo* $i{:}1 \leq i \leq n$
- Los siguientes alegaciones son equivalentes:

• A es válida (o tautología) • A no tiene contramodelo	• A es una contradicción • A no tiene modelo • A es insatisfacible

Departamento Inteligencia Artificial

Consecuencia lógica

- Dado un conjunto de premisas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y una conclusión B: B es **consecuencia lógica** de $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (**$\{A_1,\ldots,A_n\} \models B$**) sii toda interpretación que satisface $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisface B.

- Un argumento (esquema argumental) con premisas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y una conclusión B es **correcto** sii **$\{A_1,\ldots,A_n\} \models B$**

- Ejemplos:
  - $p \wedge q \models p$
  - $p \vee q \not\models p$

Ejercicios de consecuencia lógica

Para analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica se pueden hacer dos análisis:

1) Ver si todas las interpretaciones que satisfacen $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisfacen B, o bien
2) Ver que no existe una sóla interpretación que satisfaga $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y no satisfaga B

- El caso 1): requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición
- El caso 2): podemos centrarnos en definir una interpretación **i tal** que $i(\{A_1,\ldots,A_n\}) = V$ y $i(B) = F$

Consecuencia lógica: ejemplo I

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \land \neg\neg q, r \} \vDash q \lor s$$

- Tratamos de definir una interpretación tal que:

  1. $i(p \land \neg\neg q) = V$ sii
     a) **$i(p) = V$**
     b) $i(\neg\neg q) = V$ sii $i(q) = F$ sii **$i(q) = V$**
  2. **$i(r) = V$**
  3. $i(q \lor s) = F$ sii
     a) $i(q) = F$ (entra en contradicción con 1.b)
     b) **$i(s) = F$**

- Puesto que no existe interpretación que satisfaga premisas y no satisfaga conclusión, **sí hay** relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión.

Consecuencia lógica: ejemplo II

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \wedge q, \neg(p \rightarrow r) \} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$$

Tratamos de definir una interpretación tal que:

1. $i(p \wedge q) = V$ sii
   a) **$i(p) = V$**
   b) **$i(q) = V$**

2. $i(\neg(p \rightarrow r)) = V$ sii $i(p \rightarrow r) = F$
   a) **$i(p) = V$**
   b) **$i(r) = F$**

3. $i(q \wedge (p \rightarrow r)) = F$ sii
   a) $i(q) = F$ (entra en contradicción con 1.b)
   o bien…

Consecuencia lógica: ejemplo II…

b) i(p → r) = F

(i) **i(p) = V** (es compatible con 1.a)

(ii) **i(r) = F** (es compatible con 2.b)

- **Sí es posible** definir interpretación que satisfaga premisas y no satisfaga conclusión, **no hay** relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión.

Departamento Inteligencia Artificial

Ejercicios de consecuencia lógica

- Determina si las siguientes argumentaciones son consecuencia tautológica, indicando la interpretación contraejemplo si no lo son.
  1. $\{ p, p \rightarrow q \} \models q$
  2. $\{ \neg p, p \vee q \} \models q$
  3. $\{ p \rightarrow q, \neg p \} \models \neg q$
  4. $\{ p \rightarrow q, \neg q \} \models \neg p$
  5. $\{ p \leftrightarrow q, \neg p \} \models q$
  6. $p \wedge q \models p$
  7. $\neg(p \wedge q) \models \neg p \wedge \neg q$
  8. $\neg(p \vee q) \models \neg p \wedge \neg q$

Departamento Inteligencia Artificial

Ejercicios de semántica

- Determine de cada uno de los siguientes esquemas argumentales si existe relación de consecuencia lógica.

1. $\{ p \rightarrow q, p\} \models q$
2. $\{ p \vee q \} \models q \vee p$
3. $\{ p \wedge (q \vee r) \} \models p$
4. $\{ p \vee q \rightarrow r \} \models q \rightarrow r$
5. $\{\neg\neg r \wedge \neg q \} \models \neg r$
6. $\{ p \rightarrow (q \rightarrow r) \} \models q \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $\{ \neg q \rightarrow r, t \rightarrow \neg q, \neg s \rightarrow \neg q \} \models t \vee \neg s \rightarrow r$
8. $\{ p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow q, p \} \models q$
9. $\{ \neg p \rightarrow \neg s, \neg p \vee r, r \rightarrow \neg t \} \models \neg s \vee \neg t$
10. $\{ (p \rightarrow q) \wedge t, (r \vee p) \wedge \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s \} \models r \wedge s$

Departamento Inteligencia Artificial